Aóg Aa¨vq
PZfR

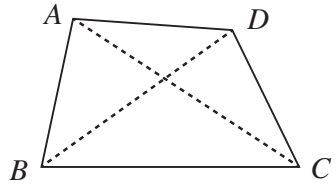
পূর্ববর্তী শ্রেণিতে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সম্পর্কে আলোচনা হয়েছে। আমরা ত্রিভুজ অঙ্কন করতে যেয়ে দেখেছি যে, একটি সুনির্দিষ্ট ত্রিভুজ আঁকতে তিনটি পরিমাপের প্রয়োজন। স্বাভাবিকভাবেই প্রশ্ন জাগে একটি চতুর্ভুজ আঁকতে চারটি পরিমাপ যথেষ্ট কি না। বর্তমান অধ্যায়ে এ বিষয়ে আলোচনা করা হবে। তাছাড়া বিভিন্ন প্রকার চতুর্ভুজ যেমন সামান্তরিক, আয়ত, বর্গ, রম্বস এর বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য রয়েছে। এ অধ্যায়ে বিভিন্ন প্রকার চতুর্ভুজের এ সকল বৈশিষ্ট্য ও চতুর্ভুজ অঙ্কন বিষয়ে আলোচনা থাকবে।

অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা –

- চতুর্ভুজের ধর্মাবলি যাচাই ও যুক্তিমূলক প্রমাণ করতে পারবে।
- প্রদত্ত উপাত্ত হতে চতুর্ভুজ আঁকতে পারবে।
- আয়তাকার ঘনবস্তুর চিত্র আঁকতে পারবে।
- ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।
- আয়তাকার ঘনবস্তু ও ঘনকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।

৮.১ চতুর্ভুজ

চারটি রেখাংশ দ্বারা আবদ্ধ চিত্র একটি চতুর্ভুজ। চিত্র দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রটি একটি চতুর্ভুজক্ষেত্র।
চতুর্ভুজের চারটি বাহু আছে। যে চারটি রেখাংশ দ্বারা ক্ষেত্রটি আবদ্ধ হয়, এ চারটি রেখাংশই চতুর্ভুজের বাহু।



A, B, C ও D বিন্দু চারটির যেকোনো তিনটি সমরেখা নয়। AB, BC, CD ও DA রেখাংশ চারটি সংযোগে $ABCD$ চতুর্ভুজ গঠিত হয়েছে। AB, BC, CD ও DA চতুর্ভুজটির চারটি বাহু। A, B, C ও D চারটি কৌণিক বিন্দু বা শীর্ষবিন্দু। $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ ও $\angle DAB$ চতুর্ভুজের চারটি কোণ। A ও B শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে C ও D শীর্ষের বিপরীত শীর্ষবিন্দু। AB ও CD বাহু পরস্পর বিপরীত বাহু এবং AD ও BC বাহু পরস্পর বিপরীত বাহু। এক শীর্ষবিন্দুতে যে দুইটি বাহু মিলিত হয়, এরা সন্নিহিত বাহু। যেমন, AB ও BC বাহু দুইটি সন্নিহিত বাহু। AC ও BD রেখাংশদ্বয় $ABCD$ চতুর্ভুজের দুইটি কর্ণ। চতুর্ভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের সমষ্টিকে এর পরিসীমা বলে। $ABCD$ চতুর্ভুজের পরিসীমা $(AB + BC + CD + DA)$ এর দৈর্ঘ্যের সমান। চতুর্ভুজকে অনেক সময় '$\square$' প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

৮.২ চতুর্ভুজের প্রকারভেদ

সামান্তরিক : যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর **সমান্তরাল**, তা সামান্তরিক। সামান্তরিকের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **সামান্তরিকক্ষেত্র** বলে।

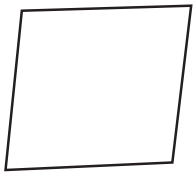
আয়ত : যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ, তাই আয়ত। আয়তের চারটি কোণ সমকোণ। আয়তের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে আয়তক্ষেত্র বলে।

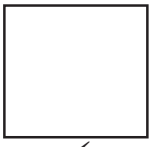
সামান্তরিক

আয়ত

রম্বস : রম্বস এমন একটি সামান্তরিক যার সন্নিহিত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান। অর্থাৎ, রম্বসের বিপরীত বাহুগুলো সমান্তরাল এবং চারটি বাহু সমান। রম্বসের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে রম্বসক্ষেত্র বলে।

বর্গ : বর্গ এমন একটি আয়ত যার সন্নিহিত বাহুগুলো সমান। অর্থাৎ, বর্গ এমন একটি সামান্তরিক যার প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ এবং বাহুগুলো সমান। বর্গের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে বর্গক্ষেত্র বলে।

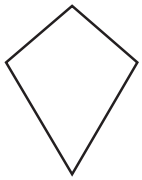

রম্বস


বর্গ

ট্রাপিজিয়াম : যে চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহু সমান্তরাল, একে ট্রাপিজিয়াম বলা হয়। ট্রাপিজিয়ামের সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র বলে।

ঘুড়ি : যে চতুর্ভুজের দুই জোড়া সন্নিহিত বাহু সমান, একে ঘুড়ি বলা হয়।

ট্রাপিজিয়াম


ঘুড়ি

কাজ

১। তোমার আশেপাশের বিভিন্ন বস্তুর ধারকে সরলরেখা ধরে সামান্তরিক, আয়ত, বর্গ ও রম্বস চিহ্নিত কর।

২। উক্তিগুলো সঠিক কিনা যাচাই কর:

(ক) বর্গ একটি আয়ত, আবার বর্গ একটি রম্বসও।

(খ) ট্রাপিজিয়াম একটি সামান্তরিক।

(গ) সামান্তরিক একটি ট্রাপিজিয়াম।

(ঘ) আয়ত বা রম্বস বর্গ নয়।

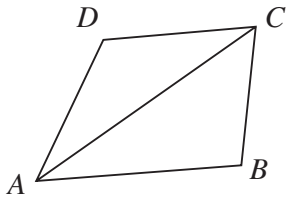
৩। বর্গের সংজ্ঞায় বলা হয়েছে বর্গ এমন একটি আয়ত যার বাহুগুলো সমান। রম্বসের মাধ্যমে বর্গের সংজ্ঞা দেওয়া যায় কি ?

৮.৩ চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য

বিভিন্ন প্রকারের চতুর্ভুজের কিছু সাধারণ ধর্ম রয়েছে। এ ধর্মগুলো উপপাদ্য আকারে প্রমাণ করা হলো।

উপপাদ্য ১

চতুর্ভুজের চারটি কোণের সমষ্টি চার সমকোণ।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ এবং AC এর একটি কর্ণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ সমকোণ।

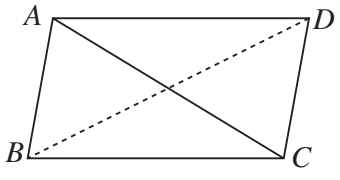
অঙ্কন: A ও C যোগ করি। AC কর্ণটি চতুর্ভুজটিকে ΔABC ও ΔADC দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করেছে।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABC এ $\angle BAC + \angle ACB + \angle B = 2$ সমকোণ।	[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ]
(২) অনুরূপভাবে, ΔDAC এ $\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 2$ সমকোণ।	[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ]
(৩) অতএব, $\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle BAC + \angle ACB + \angle B = (2+2)$ সমকোণ।	[(১) ও (২) থেকে]
(৪) $\angle DAC + \angle BAC = \angle A$ এবং $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$.	[সন্নিহিত কোণের যোগফল]
	[সন্নিহিত কোণের যোগফল]
সুতরাং, $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ সমকোণ (প্রমাণিত)	[(৩) থেকে]

উপপাদ্য ২

সামান্তরিকের বিপরীত বাহু ও কোণগুলো পরস্পর সমান।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ একটি সামান্তরিক এবং AC ও BD তার দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে,

(ক) AB বাহু $= CD$ বাহু, AD বাহু $= BC$ বাহু

(খ) $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle ABC = \angle ADC$.

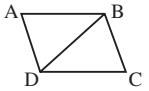
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) $AB \parallel DC$ এবং AC তাদের ছেদক, সুতরাং $\angle BAC = \angle ACD$.	[একান্তর কোণ সমান]
(২) আবার, $BC \parallel AD$ এবং AC তাদের ছেদক, সুতরাং $\angle ACB = \angle DAC$.	[একান্তর কোণ সমান]
(৩) এখন ΔABC ও ΔADC এ $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle ACB = \angle DAC$ এবং AC বাহু সাধারণ । $\therefore \Delta ABC \cong \Delta ADC$.	[ত্রিভুজের কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য]
অতএব, $AB = CD, BC = AD$ ও $\angle ABC = \angle ADC$.	
অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $\Delta BAD \cong \Delta BCD$. সুতরাং, $\angle BAD = \angle BCD$. [প্রমাণিত]	

কাজ

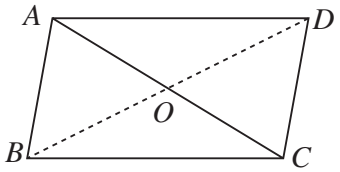
১ । প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হলে, তা একটি সামান্তরিক ।

২ । দেওয়া আছে, $ABCD$ চতুর্ভুজে $AB = CD$ এবং $\angle ABD = \angle BDC$.
প্রমাণ কর যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক ।



উপপাদ্য ৩

সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে ।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে ।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AO = CO,\ BO = DO$.

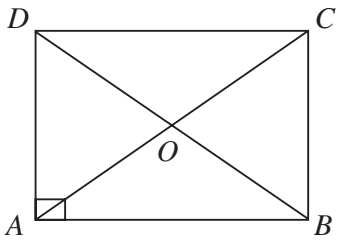
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) AB ও DC রেখাদ্বয় সমান্তরাল এবং AC তাদের ছেদক । অতএব, $\angle BAC =$ একান্তর $\angle ACD$.	[একান্তর কোণ সমান]
(২) AB ও DC রেখা সমান্তরাল এবং BD তাদের ছেদক । সুতরাং, $\angle BDC =$ একান্তর $\angle ABD$.	[একান্তর কোণ সমান]
(৩) এখন, ΔAOB ও ΔCOD এ $\angle OAB = \angle OCD, \angle OBA = \angle ODC$ এবং $AB = DC$. সুতরাং, $\Delta AOB \cong \Delta COD$. অতএব, $AO = CO$ এবং $BO = DO$. (প্রমাণিত)	[ত্রিভুজের কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য]

কাজ : ১ । প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক ।

উপপাদ্য ৪

আয়তের কর্ণদ্বয় সমান ও পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ আয়তের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে,

(i) $AC = BD$
(ii) $AO = CO,\ BO = DO$.

প্রমাণ :

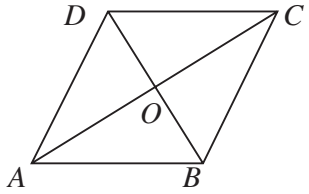
ধাপ	যথার্থতা
(১) আয়ত একটি সামান্তরিক। সুতরাং, $AO = CO,\ BO = DO$.	[সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) এখন ΔABD ও ΔACD এ $\angle DAB = \angle ADC$ $AB = DC$ এবং $AD = AD$. সুতরাং, $\Delta ABD \cong \Delta ACD$. অতএব, $AC = BD$, (প্রমাণিত)	[প্রত্যেকে সমকোণ] [সামান্তরিকের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান] [সাধারণ বাহু] [ত্রিভুজের কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য]

কাজ

১। প্রমাণ কর যে, আয়তের প্রত্যেকটি কোণ সমকোণ।

উপপাদ্য ৫

রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে,

(i) $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA =$ 1 সমকোণ
(ii) $AO = CO,\ BO = DO$.

প্রমাণ :

ধাপসমূহ	যথার্থতা
(১) রম্বস একটি সামান্তরিক। সুতরাং, $AO = CO,\ BO = DO$.	[সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
(২) এখন ΔAOB ও ΔBOC এ $AB = BC$ $AO = CO$ এবং $OB = OB$. অতএব, $\Delta AOB \cong \Delta BOC$.	[রম্বসের বাহুগুলো সমান] [(১) থেকে] [সাধারণ বাহু] [ত্রিভুজের বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]

সুতরাং $\angle AOB = \angle BOC$.
$\angle AOB + \angle BOC = 1$ সরলকোণ $= 2$ সমকোণ।
$\angle AOB = \angle BOC = 1$ সমকোণ।
অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে,
$\angle COD = \angle DOA = 1$ সমকোণ। (প্রমাণিত)

কাজ
১। দেখাও যে, বর্গের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান ও সমদ্বিখণ্ডিত করে।
২। একজন রাজমিস্ত্রী একটি আয়তাকার কংক্রিট স্ল্যাব তৈরি করেছেন। তিনি কত বিভিন্ন ভাবে নিশ্চিত হতে পারেন যে তাঁর তৈরি স্ল্যাবটি সত্যিই আয়তাকার ?

৮.৪ চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

একটি চতুর্ভুজের কর্ণ দ্বারা চতুর্ভুজক্ষেত্রটি দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত হয়। অতএব, চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের যোগফলের সমান। পূর্ববর্তী শ্রেণিতে আমরা বর্গক্ষেত্র ও আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে শিখেছি। আবার আয়ত ও সামান্তরিকের ভূমি ও উচ্চতা একই হলেও উল্লিখিত ক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান। নিচে রম্বস ও ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়কৌশল নিয়ে আলোচনা করা হবে।

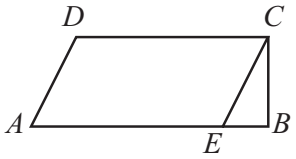
(ক) ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

C বিন্দু দিয়ে $DA \parallel CE$ আঁকি।

$\therefore$ $AECD$ একটি সামান্তরিক। চিত্র থেকে

ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ $AECD$ সামান্তরিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $+$ CEB ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= a \times h + \frac{1}{2}(b-a) \times h$$
$$= \frac{1}{2}(a+b) \times h$$



ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমস্টির গড় × উচ্চতা

কাজ :
১। বিকল্প পদ্ধতিতে ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(খ) রম্বসক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

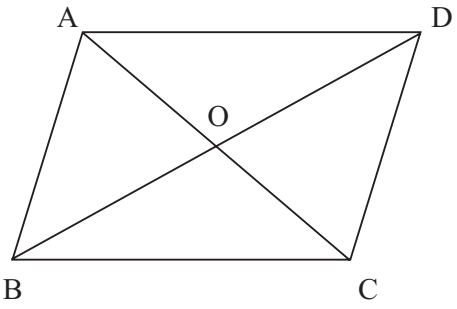
রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। তাই রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য জানা থাকলে সহজেই রম্বসক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।

মনে করি, $ABCD$ রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যকে যথাক্রমে a ও b দ্বারা নির্দেশ করি।

রম্বসক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ DAC ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $+$ BAC ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \cdot a \times \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} b$$

$$= \frac{1}{2} a \times b$$



রম্বসক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = কর্ণদ্বয়ের গুণফলের অর্ধেক

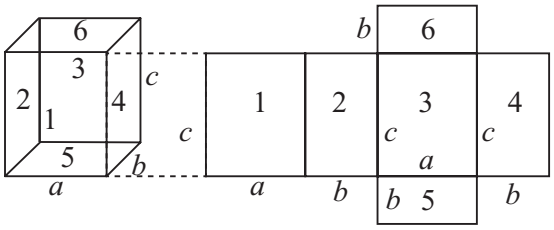
উদাহরণ ১ ।‘ a ’ দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট এককের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

সমাধান : ঘনকের ছয়টি পৃষ্ঠের প্রতিটির ক্ষেত্রফল $a \times a = a^2$

$\therefore$ ঘনকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 6a^2$

উদাহরণ ২ । a দৈর্ঘ্য b প্রস্থ ও c উচ্চতাবিশিষ্ট একটি আয়তাকার ঘনকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর ।

সমাধান :



লক্ষ করি, আয়তাকার ঘনকের প্রতিটি পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল এর বিপরীত পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের সমান ।

সুতরাং, আয়তাকার ঘনকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2(ab + bc + ac)$

অনুশীলনী ৮.১

১ । সামান্তরিকের জন্য নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. বিপরীত বাহুগুলো অসমান্তরাল　　খ. একটি কোণ সমকোণ হলে, তা আয়ত

গ. বিপরীত বাহুদ্বয় অসমান　　ঘ. কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান

২ । নিচের কোনটি রম্বসের বৈশিষ্ট্য ?

ক. কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান　　খ. প্রত্যেক কোণই সমকোণ

গ. বিপরীত কোণদ্বয় অসমান　　ঘ. প্রত্যেকটি বাহুই সমান

৩। *i.* চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি চার সমকোণ।

ii আয়তের দুইটি সন্নিহিত বাহু সমান হলে তা একটি বর্গ।

iii প্রত্যেকটি রম্বস একটি সামান্তরিক।

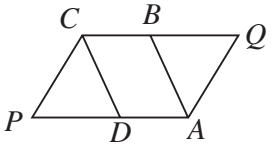
উপরের তথ্য অনুসারে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. *i* ও *ii* খ. *i* ও *iii* গ. *ii* ও *iii* ঘ. *i, ii* ও *iii*

৪। $PAQC$ চতুর্ভুজের $PA = CQ$ এবং $PA \parallel CQ$.

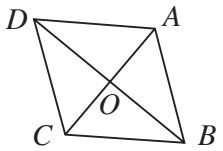
$\angle A$ ও $\angle C$ সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে AB ও CD হলে

$ABCD$ ক্ষেত্রটির নাম কী ?



ক. সামান্তরিক খ. রম্বস গ.আয়ত ঘ. বর্গ

৫। দেওয়া আছে, ΔABC এর মধ্যমা BO কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন $BO = OD$ হয়।
প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।



৬। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের একটি কর্ণ একে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

৭। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হলে, তা একটি সামান্তরিক।

৮। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হলে, তা একটি আয়ত।

৯। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হলে এবং পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করলে, তা একটি বর্গ।

১০। প্রমাণ কর যে, আয়তের সন্নিহিত বাহুর মধ্যবিন্দুসমূহের যোগে যে চতুর্ভুজ হয়, তা একটি রম্বস।

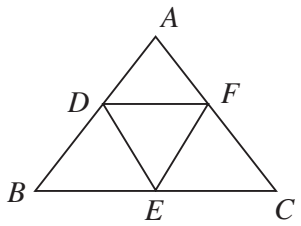
১১। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমদ্বিখণ্ডক পরস্পর সমান্তরাল।

১২। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের যেকোনো দুইটি সন্নিহিত কোণের সমদ্বিখণ্ডক পরস্পর লম্ব।

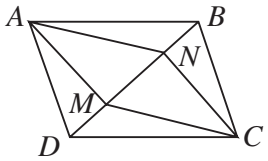
১৩। চিত্রে, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ। D, E ও F যথাক্রমে AB, BC ও AC এর মধ্যবিন্দু।

ক. প্রমাণ কর যে,
$\angle BDF + \angle DFE + \angle FEB + \angle EBD =$ চার সমকোণ।

খ. প্রমাণ কর যে, $DF \parallel BC$ এবং $DF = \frac{1}{2}BC$.



১৪। দেওয়া আছে, $ABCD$ সামান্তরিকের AM ও CN, DB এর উপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, $ANCM$ একটি সামান্তরিক ।

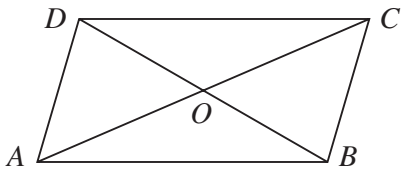


১৫। চিত্রে, $AB = CD$ এবং $AB \parallel CD$

ক. AB ভূমিবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজের নাম লেখ।

খ. প্রমাণ কর যে, AD ও BC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

গ. দেখাও যে, $OA = OC$ এবং $OB = OD$.



সম্পাদ্য

৮.৫ চতুর্ভুজ অঙ্কন

পূর্ববর্তী শ্রেণিতে আমরা জেনেছি, ত্রিভুজের তিনটি বাহু দেওয়া থাকলে নির্দিষ্ট ত্রিভুজ আঁকা যায়। কিন্তু চতুর্ভুজের চারটি বাহু দেওয়া থাকলে নির্দিষ্ট কোনো চতুর্ভুজ আঁকা যায় না। চতুর্ভুজ অঙ্কনের জন্য আরও উপাত্তের প্রয়োজন। চতুর্ভুজের চারটি বাহু, চারটি কোণ ও দুইটি কর্ণ আছে। একটি চতুর্ভুজ আঁকতে পাঁচটি অনন্য নিরপেক্ষ উপাত্তের প্রয়োজন। যেমন, কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহু ও একটি নির্দিষ্ট কোণ দেওয়া থাকলে, চতুর্ভুজটি আঁকা যাবে। নিম্নোক্ত পাঁচটি উপাত্ত জানা থাকলে, নির্দিষ্ট চতুর্ভুজটি আঁকা যায়।

(ক) চারটি বাহু ও একটি কোণ

(খ) চারটি বাহু ও একটি কর্ণ

(গ) তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ

(ঘ) তিনটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ

(ঙ) দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ।

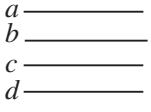
অনেক সময় কম উপাত্ত দেওয়া থাকলেও বিশেষ চতুর্ভুজ আঁকা যায়। এক্ষেত্রে যুক্তি দ্বারা পাঁচটি উপাত্ত পাওয়া যায়।

- একটি বাহু দেওয়া থাকলে, বর্গ আঁকা যায়। এখানে চারটি বাহুই সমান এবং একটি কোণ সমকোণ।
- দুইটি সন্নিহিত বাহু দেওয়া থাকলে, আয়ত আঁকা যায়। এখানে বিপরীত বাহু দুইটি পরস্পর সমান এবং একটি কোণ সমকোণ।
- একটি বাহু এবং একটি কোণ দেওয়া থাকলে, রম্বস আঁকা যায়। এখানে চারটি বাহুই সমান।
- দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া থাকলে, সামান্তরিক আঁকা যায়। এখানে বিপরীত বাহু দুইটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

সম্পাদ্য ১

কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও একটি কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি, একটি চতুর্ভুজের চার বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c, d এবং a ও b বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ x দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।



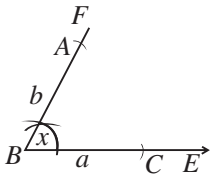
অঙ্কনের বিবরণ :

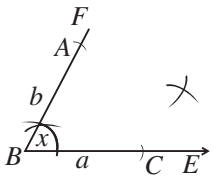
(১) যে কোনো রশ্মি BE থেকে $BC = a$ নিই। B বিন্দুতে $\angle EBF = \angle x$ আঁকি।

(২) BF থেকে $BA = b$ নিই। A ও C কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এরা পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) A ও D এবং C ও D যোগ করি।

তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

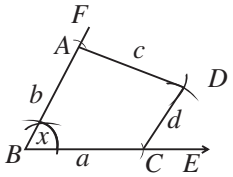




প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে,

$AB = b, BC = a, AD = c, DC = d$ এবং $\angle ABC = \angle x$

$\therefore$ $ABCD$ -ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।



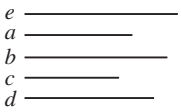
কাজ

১। একটি চতুর্ভুজ আঁকতে চারটি বাহু ও একটি কোণের পরিমাপের প্রয়োজন। এই পাঁচটি যেকোনো পরিমাপের হলে কি চতুর্ভুজটি আঁকা যাবে?

সম্পাদ্য ২

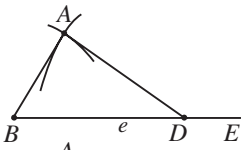
কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহু ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

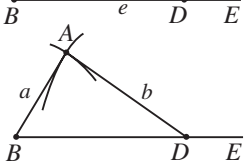
মনে করি, একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c, d এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য e দেওয়া আছে, যেখানে $a + b > c$ এবং $c + d > e$. চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ :

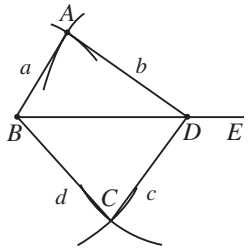
(১) যেকোনো রশ্মি BE থেকে $BD = e$ নিই। B ও D কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করে।





(২) আবার, B ও D কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে d ও c এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যেদিকে A আছে তার বিপরীত দিকে আরও দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে।

(৩) A ও B, A ও D, B ও C এবং C ও D যোগ করি।
তাহলে, $ABCD$ -ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।



প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $AB = a, AD = b, BC = d, CD = c$ এবং কর্ণ $BD = e$.
সুতরাং, $ABCD$ -ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

কাজ

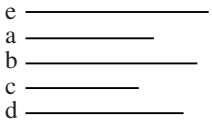
১। একটি চতুর্ভুজ আঁকতে চারটি বাহু ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য পরিমাপের প্রয়োজন। এই পাঁচটি যেকোনো পরিমাপের হলে কি চতুর্ভুজটি আঁকা যাবে? তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

২। একজন শিক্ষার্থী একটি চতুর্ভুজ $PLAY$ আঁকতে চেষ্টা করল, যার $PL = 3$ সে.মি., $LA = 4$ সে.মি., $AY = 4.5$ সে.মি., $PY = 2$ সে.মি., $LY = 6$ সে.মি.। সে চতুর্ভুজটি আঁকতে পারলো না। কেন?

সম্পাদ্য ৩

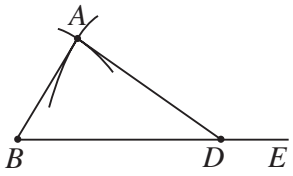
কোনো চতুর্ভুজের তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি, একটি চতুর্ভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য a, b, c এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য d, e দেওয়া আছে, যেখানে $a + b > c$ । চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

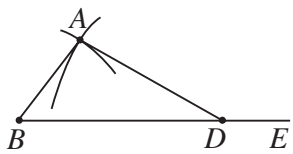


অঙ্কনের বিবরণ :

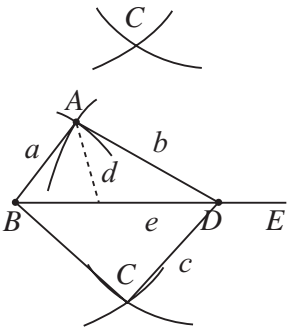
(১) যেকোনো রশ্মি BE থেকে $BD = e$ নিই। B ও D কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় A বিন্দুতে ছেদ করে।



(২) আবার, D ও A কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যেদিকে A রয়েছে এর বিপরীত দিকে আ রও দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে।



(৩) A ও B, A ও D, B ও C এবং C ও D যোগ করি।
তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

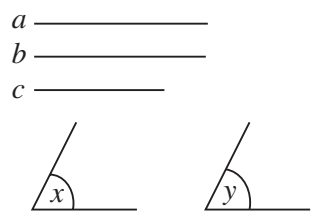


প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $AB = a, AD = b, AC = d, CD = c$
এবং কর্ণ $BD = e$ ও $AC = d$
সুতরাং, $ABCD$ -ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

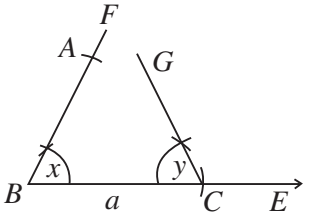
সম্পাদ্য ৪

কোনো চতুর্ভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য ও দুইটি অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

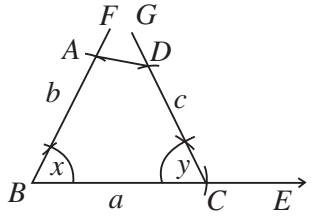
মনে করি, একটি চতুর্ভুজের তিনটি বাহু a, b, c এবং a ও b বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x$ এবং a ও c বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle y$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো রশ্মি BE থেকে $BC = a$ নিই।
B ও C বিন্দুতে $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান করে যথাক্রমে
$\angle CBF$ ও $\angle BCG$ অঙ্কন করি। BF থেকে $BA = b$ এবং
CG থেকে $CD = c$ নিই। A, D যোগ করি।
তাহলে, $ABCD$ -ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।



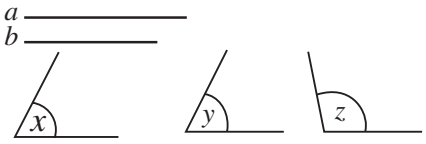
প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $AB = b$, $BC = a$, $CD = c$,
$\angle ABC = \angle x$ ও $\angle DCB = \angle y$.
সুতরাং $ABCD$ -ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।



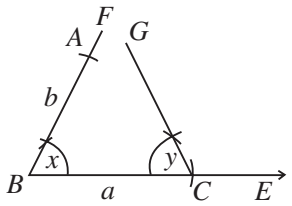
সম্পাদ্য ৫

কোনো চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য ও তিনটি কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

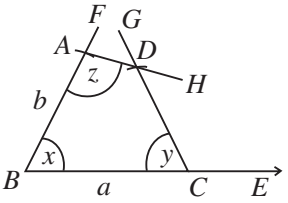
মনে করি, একটি চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু a, b এবং
তিনটি কোণ $\angle x, \angle y, \angle z$ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি
আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো রশ্মি BE থেকে $BC = a$ নিই।
B ও C বিন্দুতে $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান করে যথাক্রমে
$\angle CBF$ ও $\angle BCG$ অঙ্কন করি। BF থেকে $BA = b$ নিই।
A বিন্দুতে $\angle z$ এর সমান করে $\angle BAH$ অঙ্কন করি। AH ও
CG পরস্পরকে D বিন্দুকে ছেদ করে।
তাহলে, $ABCD$ -ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।



প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, $AB = b$, $BC = a$,
$\angle ABC = \angle x$ $\angle DCB = \angle y$ ও $\angle BAD = \angle z$.
সুতরাং $ABCD$ -ই নির্ণেয় চতুর্ভুজ।

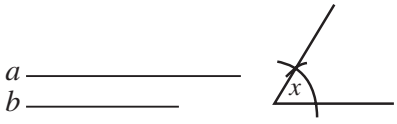


কাজ
১। একটি চতুর্ভুজের সন্নিহিত নয় এরূপ দুই বাহুর দৈর্ঘ্য ও তিনটি কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি কি আঁকা যাবে ?
২। একজন শিক্ষার্থী একটি চতুর্ভুজ $STOP$ আঁকতে চাইলো যার $ST = 5$ সে.মি., $TO = 4$ সে.মি., $\angle S = 20^\circ$, $\angle T = 30^\circ$, $\angle O = 40^\circ$। সে চতুর্ভুজটি কেন আঁকতে পারলো না?

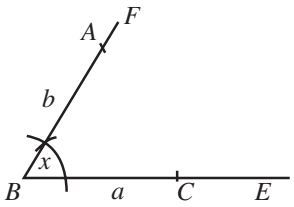
সম্পাদ্য ৬

কোনো সামান্তরিকের সন্নিহিত দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি *আঁকতে হবে।*

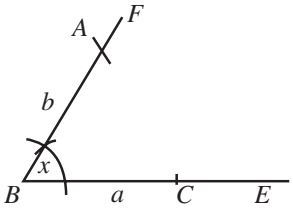
মনে করি, একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু a ও b এবং
এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

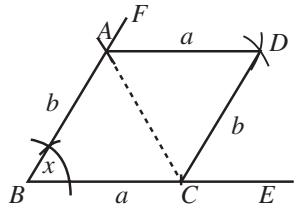


অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো রশ্মি BE থেকে $BC = a$ নিই। B বিন্দুতে $\angle EBF = \angle x$ অঙ্কন করি। BF থেকে b এর সমান BA নিই। A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃওচাপ আঁকি। এরা পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। A, D ও C, D যোগ করি। তাহলে, $ABCD$ -ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।



প্রমাণ : A, C যোগ করি। ΔABC ও ΔADC এ
$AB = CD = b$,
$AD = BC = a$ এবং AC বাহু সাধারণ।
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DCA.$
অতএব, $\angle BAC = \angle DCA$ কিন্তু, কোন দুইটি একান্তর কোণ।
$\therefore AB \parallel CD.$
অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $BC \parallel AD.$
সুতরাং $ABCD$ একটি সামান্তরিক।
আবার অঙ্কন অনুসারে $\angle ABC = \angle x.$
অতএব, $ABCD$ -ই নির্ণেয় সামান্তরিক ।



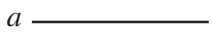


লক্ষকরি: শুধুমাত্র একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকলেই বর্গ আঁকা সম্ভব। বর্গের বাহুগুলো সমান আর কোণগুলো প্রত্যেকটি সমকোণ। তাই বর্গ অঙ্কনের জন্য প্রয়োজনীয় পাঁচটি শর্ত সহজেই পূরণ করা যায়।

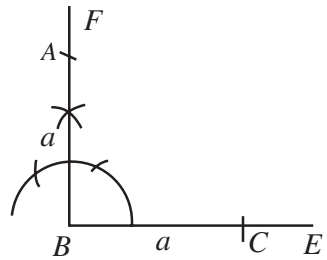
সম্পাদ্য ৭

কোনো বর্গের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে, বর্গটি আঁকতে হবে।

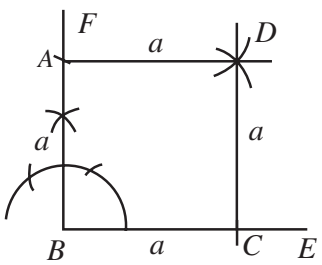
মনে করি, a কোনো বর্গের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য। বর্গটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ : যেকোনো রশ্মি BE থেকে $BC = a$ নিই। B বিন্দুতে $BF \perp BC$ আঁকি। BF থেকে $BA = a$ নিই। A ও C কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে। A ও D এবং C ও D যোগ করি।
তাহলে, $ABCD$ -ই উদ্দিষ্ট বর্গ।



প্রমাণ : $ABCD$ চতুর্ভুজের $AB = BC = CD = DA = a$
এবং $\angle ABC =$ এক সমকোণ।
সুতরাং, এটি একটি বর্গ।
অতএব, $ABCD$ -ই নির্ণেয় বর্গ।



অনুশীলনী ৮.২

১। একটি চতুর্ভুজ আঁকতে কয়টি অনন্য নিরপেক্ষ উপাত্তের প্রয়োজন?

ক. 3টি খ. 4টি গ. 5টি ঘ. 6টি

২। *i.* দুইটি সন্নিহিত বাহু দেওয়া থাকলে আয়ত আঁকা যায়।

ii. চারটি কোণ দেওয়া থাকলে একটি চতুর্ভুজ আঁকা যায়।

iii. বর্গের একটি বাহু দেওয়া থাকলে বর্গ আঁকা যায়।

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. *i* ও *ii* খ. *i* ও *iii* গ. *ii* ও *iii* ঘ. *i, ii* ও *iii*

৩। নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে চতুর্ভুজ অঙ্কন কর :

ক. চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3·5 সে.মি., 2·8 সে.মি. ও 3 সে,মি. এবং কোণ 45°।

খ. চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি., 3 সে.মি., 3·5 সে.মি., 4·5 সে.মি. এবং কোণ 60°।

গ. চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.2 সে.মি, 3·5 সে.মি., 2·5 সে.মি. ও 2·8 সে.মি. এবং কর্ণ 5 সে.মি.।

ঘ. চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3·2 সে.মি., 3 সে.মি., 3·5 সে.মি. ও 2·8 সে.মি. এবং কর্ণ 5 সে.মি.।

ঙ. তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3·5 সে.মি., 2·5 সে.মি. এবং কোণ 60° ও 45°।

চ. তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 4 সে.মি., 4·5 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণ 5·2 সে.মি. ও 6 সে.মি.।

৪। একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি.; বর্গটি আঁক।

৫। রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3·5 সে.মি. ও একটি কোণ 75° ; রম্বসটি আঁক।

৬। আয়তের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি. ও 4 সে,মি.; আয়তটি আঁক।

৭। চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দুতে কর্ণ দুইটির চারটি খণ্ডিত অংশ এবং এদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁক। $OA = 4{\cdot}2$ সে.মি., $OB = 5{\cdot}8$ সে.মি., $OC = 3{\cdot}7$ সে.মি., $OD = 4{\cdot}5$ সে.মি. ও $\angle AOB = 100°$.

৮। দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। আয়তটি আঁক।

৯। কর্ণ এবং একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। আয়তটি আঁকতে হবে।

১০। একটি বাহু এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

১১। একটি বাহু এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

১২। দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।

১৩। একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু 4 সে.মি. ও 3 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°

ক. প্রদত্ত তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. অঙ্কনের বিবরণসহ সামন্তরিকটি আঁক।

গ. অঙ্কনের বিবরণসহ সামন্তরিকটির বৃহত্তম কর্ণের সমান কর্ণবিশিষ্ট একটি বর্গ আঁক।